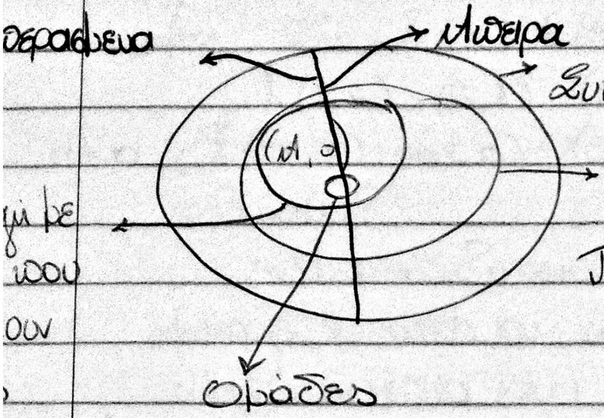
6/10/16

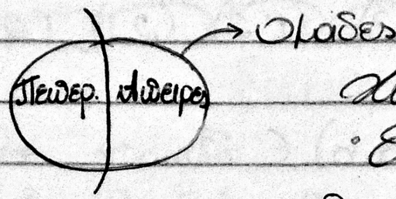


Συνολο εφοδιασμενο με συλλογες συνό

Συνολα με πραξεις

Πραξη: ∘ οριζεται ως $A \times A \to A$

$(a, b) \to a \circ b$



Χωριζονται επισης σε:

· Ευκολες · Πολυπλοκες

πχ κυκλικες

· <u>Σχεσεις Ισοδυναμιας</u>

Σχεση A, B

$\emptyset \neq \Sigma \subseteq A \times B$, $(a,b) \in \Sigma \Leftrightarrow a \Sigma b$

↳ σχετιζεται

Το πιο γνωστο πχ σχεσης ειναι η συναρτηση

$f : A \to B$ συναρτηση

"f" $\subseteq A \times B$

$f : \{ (x, f(x)) \mid \forall x \in A \}$

Σχεση Ισοδυναμιας στο A

$\Sigma \subseteq A \times A$

i) Ανακλαστικη $\forall a \in A \Rightarrow (a,a) \in \Sigma$

ii) Συμμετρικη: Αν $(a,b) \in \Sigma \Rightarrow (b,a) \in \Sigma$

iii) Μεταβατικη Αν (a,b) και $(b,c) \in \Sigma \Rightarrow (a,c) \in \Sigma$

<u>πχ</u>

$A = \{1, 2, 3\}$

1) $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$
2) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$
3) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(a,b),(b,a)\}$, $a \neq b$

Παρατήρηση:

Κάθε συλλογή είναι διακεκριμένη, δηλ δε μπορώ να έχω 2 φορές π.χ το (1,1) για αυτό και $a \neq b$

4) $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,3)(3,1)\}$

πχ

$\mathbb{Z} \bmod m \Leftrightarrow (a,b) \in \mathcal{R} \bmod m \Leftrightarrow a-b=km,\ k \in \mathbb{Z}$
$\Leftrightarrow \mathbb{Z}_m = \{\_,\_,\ldots,\_\}$

Ορισμός

Έστω $\mathcal{R}: A \times A$ σχέση ισοδυναμίας
$a \in A$, ορίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του a:
$[a], \bar{a}, a_{\mathcal{R}} = \{b \mid b \in A \text{ και } (a,b) \in \mathcal{R}\} \subseteq A$

Λήμμα

Οι κλάσεις ισοδυναμίας μιας σχέσης ισοδυναμίας είναι ξένες μεταξύ τους ή ταυτίζονται

Απόδειξη

$[a] \neq [b]$
$[a] \cap [b] \ni c \Leftrightarrow (a,c)^{\in \mathcal{R}}$ και $(c,b)^{\in \mathcal{R}} \Rightarrow$
$(a,b) \in \mathcal{R} \Rightarrow [a]=[b]$

πχ

$[0] = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \text{ και } a-0=km\} = \{km \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$[1] = \{a \mid a \in \mathbb{Z} \text{ και } a-1=km\} = \{km+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$[2] = \ldots$
$\vdots$
$[m-1] = \ldots$

Άρα $\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots [m-1]\}$

Έστω τυχαίο $n \in \mathbb{Z}$ Με ποιο στοιχείο του $\mathbb{Z}_m$ είναι ισοδύναμο?

$$n = \pi \cdot m + \upsilon \Rightarrow [m] = [\upsilon] \ni n$$

Άρα

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup \dots \cup [m-1] \rightarrow \text{διαμέριση}$$

Οι σχέσεις ισοδυναμίας και οι διαμερίσεις είναι το ίδιο πράγμα

Πχ

$f: A \rightarrow B$: συνάρτηση

Α να οριστεί σχ. ισοδυναμίας

πχ $(a, a') \Leftrightarrow f(a) = f(a')$

Κλάσεις ισοδυναμίας της συγκεκριμένης σχέσης δίνονται από

$$\forall b \in B \Rightarrow f^{-1}(b) = \{a \,/\, a \in A \text{ και } f(a) = b\}$$

Πχ

$A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: Σχέση στο Α

$$(a, b)\, \Sigma\, (c, d) \Leftrightarrow 2a - b = 2c - d$$

1) Ανακλαστική: $\forall (a, b)\, \Sigma\, (a, b) \Leftrightarrow 2a - b = 2a-$

2) Συμμετρική: Αν $(a, b)\, \Sigma\, (c, d) \Rightarrow (c, d)\, \Sigma\, (a,$

$$2a - b = 2c - d \Leftrightarrow 2c - d = 2a - b$$

3) Μεταβατική: Αν $(a, b)\, \Sigma\, (c, d)$ και $(c, d)\, \Sigma\, (z,$

$(a, b)\, \Sigma\, (z, w)$

$$\left.\begin{array}{l} 2a - b = 2c - d \\ 2c - d = 2z - w \end{array}\right\} \Rightarrow 2a - b = 2z - w$$

• Κλάσεις Ισοδυναμίας

• $[(0,0)] = \{(a, 2a) / a \in \mathbb{Z}\}$: Διαφορά 0

γιατί

$$(a,b) \mathcal{R} (0,0) \Leftrightarrow 2a = b$$

• $[(0,1)] = \{(a, 2a+1) / a \in \mathbb{Z}\}$

γιατί

$$(a,b) \mathcal{R} (0,1) \Leftrightarrow 2a-b=-1 \Rightarrow b = 2a+1$$

• $[(0,2)] = \{(a, 2a+2) / a \in \mathbb{Z}\}$

γιατί

$$2a-b = -2 \Rightarrow b = 2a+2$$

• $[(0,k)] = \{(a, 2a+k) / a \in \mathbb{Z}\}$

Αν $k \neq m \Rightarrow [(0,k)] \neq [(0,m)]$

• $[(0,-1)] = \{(a, 2a-1), a \in \mathbb{Z}\}$

$$2a-b=1 \Rightarrow b = 2a-1$$

• $[(0,-k)]$ $k \in \mathbb{N}$

Έστω $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ τυχαίο

$$2a-b = 2\cdot 0 - (b-2a)$$

$$(a,b) \mathcal{R} (0, b-2a)$$

Ορισμός

Έστω $A \neq \emptyset$, μια διαμέριση του A είναι μια συλλογή A_i, $i \in J$ υποσυνόλων του A έτσι ώστε $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ για $i \neq j$ και

$$A = \bigsqcup_{i \in J} A_i$$

Πρόταση

Έστω $\mathcal{R}$ σχέση ισοδυναμίας στο $A \neq \emptyset$. Τότε οι κλάσεις ισοδυναμίας αποτελούν μια διαμέριση του A.

Απόδειξη

Προφανώς οι κλάσεις ισοδυναμίας είναι ξένες μεταξύ τους. Αρκεί ν.δ.ο. η ένωσή τους δίνει το A. Έστω $a \in A \Rightarrow a \in [a] \Rightarrow$ Ένωση κλάσεων ισοδυναμίας $= A$.

Παράδειγμα

$\mathcal{R}$ σχέση ισοδυναμίας στο A. Ορίστε απεικόνιση από το A, η οποία να δίνει την $\mathcal{R}$ σαν σχέση ισοδυναμίας.

$f: A \to B$ απεικόνιση

$\mathcal{R}$ στο A με $(a, a') \in \mathcal{R} \Leftrightarrow f(a), f(a')$

$\mathcal{R}$ στο $A \to f: A \to ? \to \mathcal{R}$

$f: A \to \{$σύνολο κλάσεων ισοδυναμίας$\} = \{[a] / a \in A\}$

πχ

$A = \{1, 2, 3\} \to \{[1], \dots\}$

$(1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1)$

Θεώρημα

Έστω $A \neq \emptyset$. Το σύνολο των διαμερίσεων στο A σ[...]ται με 1-1 και επί σχέση με το σύνολο των σ[...]σεων ισοδυναμίας που ορίζονται στο A.

$\{$Διαμερίσεις στο $A\} \leftrightarrow \{$Σχέσεις ισοδυναμίας στο [...]

πχ

$A = \{1, 2, 3\} = \{1, 3\} \sqcup \{2\}$

$(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (3,1), (1,3)$

πχ

$\mathbb{Z}$ $(a,b) \Leftrightarrow a-b=km$

$\mathbb{Z}=[0]_m \sqcup [1]_m \sqcup \dots \sqcup [m-1]_m$

$(\mathbb{Z},+)$: αβελιανή ομάδα

Ερώτημα:

$\mathbb{Z}_m=\{[0]_m, \dots, [m-1]_m\}$

Μπορεί να εφοδιαστεί με $\oplus$ τ.ω $[a]_m \oplus [b]_m=[c]_m$

Πως?

Είναι καλά ορισμένη? } Πρέπει για να ισχύει αυτό είναι ανεξάρτητη από τον αντιπρόσωπο.

Ορίζουμε

$[a]_m+[b]_m=[a+b]_m$

Καλά Ορισμένη:

$\left.\begin{array}{l}[a]_m=[a']_m \\ [b]_m=[b']_m\end{array}\right\} \Rightarrow [a+b]_m=[a'+b']_m$

Άρα

$a-a'=k_1m$

$b-b'=k_2m$

Θέλουμε $(a+b)-(a'+b')=\lambda m$

$a+b-a'-b'=(k_1+k_2)m$

Άρα το έχουμε.

Επίσης ορίζεται $\odot$ από το γινόμενο στο $\mathbb{Z}$: $(\mathbb{Z},\cdot)$

$[a]_m \odot [b]_m=[a\cdot b]_m$

Ανεξάρτητη από τους αντιπροσώπους

Άρα

$(\mathbb{Z}_m, \oplus, \odot)$ έχει αλγεβρική δομή

$(\mathbb{Z}_m, \oplus)$: αβελιανή ομάδα
$(\mathbb{Z}_m, \odot)$: μισορεί.

<u>Ορισμός</u>

Έστω $M \neq \emptyset$ εφοδιασμένο με μια πράξη $\square : M \times M \to M$ και μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στο M.

Θα λέμε ότι η πράξη είναι δεξιά (ή αριστερά) συμβιβαστή με τη σχέση, αν ισχύει:

$$a \sim b \Rightarrow a \square \gamma \sim b \square \gamma \quad \forall \gamma \in M$$
$$\Rightarrow \gamma \square a \sim \gamma \square b$$

Αν είναι δεξιά και αριστερά θα γράφαμε απλά συμβιβαστή.

<u>πχ</u>

$\mathbb{Z}$: mod n

Ομάδες

<u>Ορισμός</u>

Μια πράξη $\square$ στο M ($\square : M \times M \to M$) καλείται προσεταιριστική αν $\forall a, b, \gamma \in M$

$$(a \square b) \square \gamma = a \square (b \square \gamma)$$

<u>Παράδειγμα</u>

$(\mathbb{Z}, -)$ ορίζεται η πράξη της αφαίρεσης, αλλά δεν είναι προσεταιριστική:

$$(1-2)-3 = 1-(2-3)$$

<u>Ορισμός</u>

Ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μια πράξη καλείται ημιομάδα (semigroup)

<u>Διαφορά Ομάδας ~ Ημιομάδας?</u>
Στην ημιομάδα δεν υπάρχει ουδέτερο και αντίστροφο.

Ορισμός

Έστω $(A, \square)$ ημιομάδα ώστε να υπάρχει στοιχείο 1_A, με την ιδιότητα $a \square 1_A = 1_A \square a = a \ \forall a \in A$ τότε το ζεύγος $(A, \square)$ θα καλείται μονοειδές (monoid)

ΠΧ

$(\mathbb{Z}, \cdot)$ μονοειδές

Ορισμός

Ένα μονοειδές $(A, \square)$ για το οποίο ισχύει ότι $\forall a \in A, \ \exists b \in A$, με $a \square b = b \square a = 1_A$ θα καλείται ομάδα

Ορισμός

Το ζεύγος $(A, \square)$ θα καλείται αντιμεταθετικό, αν $b \square a = a \square b \ \forall a, b \in A$.

Ορισμός

Έστω ότι το A είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $\boxplus$ και $\odot$ ώστε να ισχύει $(a \boxplus b) \odot \gamma = (a \odot \gamma) \boxplus (b \odot \gamma)$ θα καλούνται δεξιά συμβατές.

Αντίστοιχα αριστερά

Η ιδιότητα $(a \boxplus b) \odot \gamma = (a \odot \gamma) \boxplus (b \odot \gamma)$ ή $a \odot (b \boxplus \gamma) = (a \odot b) \boxplus (a \odot \gamma)$ καλείται επιμεριστική.

ΠΧ

$M(n \times m, A) = \{$ το σύνολο των $n \times m$ πινάκων από

A: συνήθως $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_m$

$(M(n \times m, A), +)$: αβελιανή ομάδα

$((M(n\times m, \mathbb{F}), +)$

$\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $\mathbb{Z}_p$

Διανυσματικός χώρος διάστασης $m \times n$

$M(n\times n, \mathbb{F})$ με πρόσθεση και γινόμενο

Το γινόμενο δεν είναι αντιμεταθετικό.

Ο αντίστροφος δεν υπάρχει πάντα.

$(M(m\times n, \mathbb{F}), +)$ αβελιανή

$(M(n\times n, \mathbb{F}), \cdot)$ μονοειδές

} Μοναδιαίος Δακτύλιος

Οι πράξεις είναι συμβιβαστές

Γενικός δακτύλιος μπορεί έχει μηδενοδιαιρέτες

$GL(n, \mathbb{F}) = \{n\times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες$\}$

$\exists A^{-1} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$\exists A^{-1}$ και $B^{-1} \Rightarrow \exists (AB)^{-1}$

$(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$: ομάδα $\subseteq M(n\times n, \mathbb{R})$

Τη συναντάμε στη Διαφορική Γεωμετρία και γενικά και στη Τοπολογία

$O(n, \mathbb{R}) \leq GL(n, \mathbb{R})$

$\|$

$\{$Ορθογώνιοι πίνακες$\}$

$A \cdot A^t = I_n$ και $A^{-1} = A^T$